

ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 04.12.2023

Уважаемые студенты! Сегодня мы с вами рассмотрим более сложные тригонометрические уравнения. Одни из этих способов вам, наверное, покажутся трудными, а другие – лёгкими, так как некоторыми приёмами решения уравнений вы уже владеете.

По рабочей тетради повторите

1. Определение арккосинуса, арксинуса, арктангенса, арккотангенса.
2. Формулы решения простейших тригонометрических уравнений вида $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$

Новый материал (конспект в рабочую тетрадь!!!)

Тема: «Тригонометрические уравнения. Основные приемы их решений»

1. Уравнения

1 способ. Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

Пример 1 Решить уравнение $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Решение:

Введем новую переменную $y = \sin x$.

Тогда данное уравнение можно записать в виде $2y^2 + y - 1 = 0$. Мы получили квадратное уравнение. Его корнями служат $y_1 = \frac{1}{2}$ и $y_2 = -1$. Следовательно,

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ или } \sin x = -1.$$

В первом случае получим решения

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k,$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

Во втором случае

$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, n \in Z, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, n \in Z.$

Вспомним основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, откуда $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Пример 2 Решить уравнение $3 \sin x - 2 \cos^2 x = 0$

Решение:

$$3 \sin x - 2 \cos^2 x = 0,$$

$$3 \sin x - 2(1 - \sin^2 x) = 0, \text{ (воспользуемся тем, что } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x)$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0,$$

Пусть $\sin x = t$, где $|t| \leq 1$. Получим квадратное уравнение $2t^2 + 3t - 2 = 0$,

$$D = 9 + 16 = 25.$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4}.$$

$$t_1 = -2;$$

$$t_2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом

$t_1 = -2$ не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$.

Значит $\sin x = \frac{1}{2}$. Поэтому $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Пример 3 Решить уравнение $6 \sin^2 x + 5 \cos x - 2 = 0$.

Решение:

Заменяя $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получим относительно $\cos x$ квадратное уравнение $6(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x - 2 = 0$

$$-6 \cos^2 x + 5 \cos x + 4 = 0$$

$$6 \cos^2 x - 5 \cos x - 4 = 0$$

Введем новую переменную $y = \cos x$.

Тогда $6y^2 - 5y - 4 = 0$, откуда $y_1 = -\frac{1}{2}$ или $y_2 = 1\frac{1}{3}$.

Уравнение $\cos x = 1\frac{1}{3}$ не имеет решений, т.к. $1\frac{1}{3} > 1$.

Решая уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$ находим: $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n \Rightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2 способ. Решение однородных тригонометрических уравнений

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$, где a и b – некоторые числа, называются однородными уравнениями первой степени относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Пример 1 Решить уравнение $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$.

Решение:

$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$ - однородное уравнение.

Разделить обе части уравнения на $\cos x$.

Получим $\frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{3} \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$, $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

$$x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi, n \in Z, x = -\frac{\pi}{3} + \pi, n \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi, n \in Z$

Уравнения вида $a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = 0$, где a, b, c – некоторые числа, называются однородными уравнениями второй степени относительно $\sin x$ или $\cos x$.

Пример 1 Решить уравнение $4 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x = 0$.

Решение:

$4 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x = 0$ - однородное уравнение. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$.

Получим $4 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 7 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$.

$$4 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 7 = 0.$$

Замена переменной: $y = \operatorname{tg} x$

$$4y^2 + 3y - 7 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 + 112 = 121, y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm 11}{8}, y_1 = 1, y_2 = -1 \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{tg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi, n \in Z;$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \frac{3}{4}, x = \operatorname{arctg}\left(-1 \frac{3}{4}\right) + \pi, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi, n \in Z; x = \operatorname{arctg}\left(-1 \frac{3}{4}\right) + \pi, n \in Z$.

3 способ. Метод разложения на множители

Пример 1 Решить уравнение $\sin 4x = 3 \cos 2x$.

Решение:

Для решения уравнения воспользуемся формулой синуса двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - 3 \cos 2x = 0,$$

$\cos 2x (2 \sin 2x - 3) = 0$. Произведение этих множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей будет равен нулю.

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad \sin 2x = 1,5 - \text{нет решений, т.к. } |\sin \alpha| \leq 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2 Решить уравнение $2 \sin^2 x + \sin 2x - 2 \cos^2 x = 1$

Решение:

Применим формулы $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Получим $2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x$, $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$ - однородное уравнение.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$.

$$\text{Получим } \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 3 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0.$$

$$tg^2 x + 2tgx - 3 = 0.$$

Замена переменной: $y = tgx$

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$y_1 = 1, y_2 = -3$$

$$tgx = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$tgx = -3, \quad x = -\arctg 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = -\arctg 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru